UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA

Facultad de Ingeniería Industrial y de Sistemas

DEPARTAMENTO DE CIENCIAS BÁSICAS

CURSO	:	CALCULO DIFERENCIAL	CICLO	:	2024-I
CÓDIGO	:	BMA-01			
DOCENTE	:	A. HUAMAN, J. CERNADES, D. FLORES, O. BERMEO, V. HUANCA, R. VAQUEZ.	FECHA	:	17-07-2024

EXAMEN SUSTITUTORIO

Tiempo de duración: 120 minutos

1. Sean $a_1, a_2, \ldots, a_n$ y $b_1, b_2, \ldots, b_n$ números reales cualesquiera. Demostrar que

   a) $(a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n)^2 \leqslant (a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2)$. (3.0 puntos)

   b) $\dfrac{|a_1 + a_2 + \cdots + a_n|}{n} \leqslant \sqrt{\dfrac{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2}{n}}$. (2.0 puntos)

2. Justifique su respuesta, para determine el valor de verdad de las siguiente proposiciones:

   a) Si $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ no existe y $\lim\limits_{x \to x_0} g(x)$ existe, entonces $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) \cdot g(x)$ no existe.
   (1.5 puntos)

   b) Si $g \circ f$ es inyectiva, entonces f es inyectiva. (1.5 puntos)

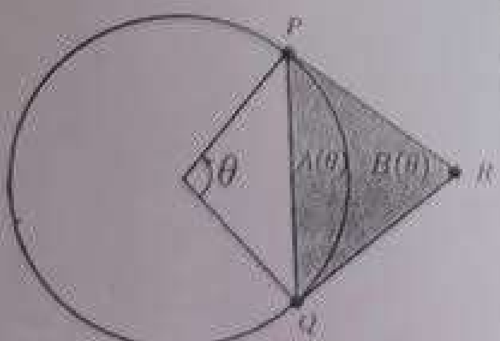
3. Sea $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ una función continua tal que $f(0) = f(1)$. Pruebe que existe un $c \in [0, \frac{1}{2}]$ tal que $f(c) = f(c + \frac{1}{2})$. (5.0 puntos)

4. Sean f y g funciones definidas en todo $\mathbb{R}$ que verifican las siguientes propiedades:

   i) $f(x + y) = f(x) \cdot g(y) + f(y) \cdot g(x)$.

   ii) f y g son derivables en $x = 0$, con $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$, $g(0) = 1$ y $g'(0) = 0$.

   Demuestre que f es derivable en todo $\mathbb{R}$ y que $f'(x) = g(x)$. (3.0 puntos)

5. 

   Un arco PQ de un círculo subtiende un ángulo central θ, como en la figura. Sea $A(\theta)$ el área entre la cuerda PQ y el arco PQ y $B(\theta)$ el área entre las rectas tangentes PR, QR y el arco PQ. Encuentre $\lim\limits_{\theta \to 0^+} \dfrac{A(\theta)}{B(\theta)}$. (4.0 puntos)