UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA

Facultad de Ingeniería Industrial y de Sistemas

DEPARTAMENTO DE CIENCIAS BÁSICAS

CURSO	:	ÁLGEBRA LINEAL	CICLO	:	2024-3
CÓDIGO	:	BMA-03			
DOCENTE	:	Cernades G., Fuentes J.	FECHA	:	25-02-2025

CUARTA PRÁCTICA CALIFICA

Tiempo de duración: 110 minutos

1. Justificando su respuesta indicar la verdad o falsedad de las siguientes proposiciones:

   a) $T : \mathbb{C} \to \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ tal que $T(a+bi) = ax^2 + bx$. [1.5 puntos]

   b) $T : M_{nn} \to M_{nn}$, $T(A) = A^tA$, donde M_{nn} es el conjunto de matrices de orden n. [1.0 punto]

   c) $T : D_n \to D_n$, $T(D) = I + D$, donde D_n es el conjunto de matrices diagonales de orden n. [1.0 punto]

   d) $T : C[0,1] \to \mathbb{R}$, $T(f) = \int_0^1 f(x)\,dx$. [1.5 puntos]

2. Sea V un espacio de dimensión finita y sea $T : V \to V$ una TL nilpotente[1] de índice 4. Fijemos $v \in V$ tal que $T^3(v) \neq 0$. Luego,

   a) $\{v, T(v), T^2(v), T^3(v)\}$ es LI. [2.5 puntos]

   b) El subespacio $S = Gen\{v, T(v), T^2(v), T^3(v)\}$ es invariante[2] por T. [2.5 puntos]

3. Sean $q(x) = 1 + bx + x^2$ y S el subespacio generado por los polinomios $p_1(x) = a + x + x^2$, $p_2(x) = b + abx + bx^2$ y $p_3(x) = 1 + x + ax^2$.

   (a) Determine los valores de a y b para que $S = \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$. [2.0 puntos]

   (b) Determine los valores de a y b para que $q \in S$ y $dim(S)$ sea 1 ó 2. En cada caso, indique una base para S. [2.0 puntos]

   (c) Determine los valores de a y b para que $q \notin S$. [1.0 punto]

4. Sea $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ una base de $\mathbb{R}^3$, donde $v_1 = (1,1,0)$, $v_2 = (-1,0,0)$, $v_3 = (-1,-2,1)$, y sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ una T.L. de modo que $\begin{pmatrix} 10 & -3 & -12 \\ 3 & 0 & -4 \\ 3 & -1 & -3 \end{pmatrix}$ es la matriz de T con respecto a B.

   a) Usando dicha matriz, calcular $T(3v_1 + v_2 - 2v_3)$. [2.0 puntos]

   b) Determinar $T(x,y,z)$. [2.0 puntos]

   c) Determine la dimensión del núcleo e imagen de T. [1.0 punto]

[1] Una transformación lineal $T : V \to V$ es nilpotente de índice k si k es el menor entero positivo tal que $T^k = 0$.
[2] Decimos que un subespacio $S \subset V$ es invariante por $T : V \to V$ si $T(S) \subset S$.