UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA

Facultad de Ingeniería Industrial y de Sistemas

DEPARTAMENTO DE CIENCIAS BÁSICAS

CURSO	:	ÁLGEBRA LINEAL	CICLO	:	2022-3
CÓDIGO	:	BMA-03			
DOCENTE	:	CERNADES, G	FECHA	:	13-03-2023

EXAMEN FINAL

Tiempo de duración: 120 minutos

1. Sea $A = \begin{pmatrix} b & b & 3 \\ a & b & a \\ 2a & -b & a \end{pmatrix}$ con $a, b, \in \mathbb{Z}$, los valores propios de A son tales que $\lambda_2 = \frac{1}{2}\lambda_3 = -2\lambda_1$ y satisfacen la ecuación $\lambda^3 - 5\lambda^2 + c\lambda + d = 0$.

   (a) Halle los valores y vectores propios de A. (2.0 puntos)

   (b) Calcule los valores y vectores propios de $f(A) = A^4 - 8A^2 + 2I$. (1.5 puntos)

   (c) Diagonalizar A si es posible. (1.5 puntos)

2. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, determine

   (a) El polinomio característico. (1.0 punto)

   (b) los valores y vectores propios de A. (1.5 puntos)

   (c) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{A^n}{4^n}$ usando Cayley Hamilton. (2.5 puntos)

3. Sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ una transformación lineal definido por $T(x, y, z) = (2y + z, x - 4y, 3x)$.

   (a) Halle la representación matricial de T respecto a la base $S = \{\vec{u}_1 = (1, 1, 1), \vec{u}_2 = (1, 1, 0), \vec{u}_3 = (1, 0, 0)\}$. (1.0 punto)

   (b) Usando *a*) Halle $[T(\vec{v})]_S$, si $\vec{v} = (1, 2, 3)$. (1.5 puntos)

   (c) Dadas las bases $S = \{\vec{u}_1 = (1, 1, 1), \vec{u}_2 = (1, 1, 0), \vec{u}_3 = (1, 0, 0)\}$ y $S' = \{\vec{v}_1 = (1, 0, 0), \vec{v}_2 = (0, 1, 1), \vec{v}_3 = (1, 0, 1)\}$. Halle la matriz de cambio P de S a S'. (1.0 punto)

   (d) Usando *c*) halle $[T]_S$. (1.5 puntos)

4. Justificando su respuesta, indique el valor de verdad o falsedad de las siguientes proposiciones:

   (a) Si $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ es una transformación lineal tal que $T(1, 2) = (3, -1, 5)$ y $T(1, 0) = (2, 1, -1)$, entonces $T(a, b) = (2b - a, b - 3a, 6a + 2b)$. (1.5 puntos)

   (b) $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot ((\vec{c} \times \vec{d}) \times (\vec{e} \times \vec{f})) = \begin{vmatrix} [\vec{a}, \vec{b}, \vec{d}] & [\vec{d}, \vec{e}, \vec{f}] \\ [\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] & [\vec{c}, \vec{e}, \vec{f}] \end{vmatrix}$ (1.5 puntos)

(c) Si $T : M_{22} \to M_{22}$ es una aplicación tal que $T(A) = MA + AM$, donde $M = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$, entonces T es una transformación lineal. (1.0 punto)

(d) Sea $V = C([0,1]) = \{f : [0,1] \to \mathbb{R} \mid f \text{ es continua}\}$, entonces $W = \{f \in V \mid f(0) + f(1) = 0\}$ es un subespacio vectorial. (1.0 punto)

Lima, 13 de marzo del 2023