



UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA

Facultad de Ingeniería Industrial y de Sistemas

DEPARTAMENTO DE CIENCIAS BÁSICAS

CURSO	:	CÁLCULO DIFERENCIAL	CICLO	:	2023-II
CÓDIGO	:	BMA-01			
DOCENTE	:	A. HUAMAN, J. CERNADES, D. FLORES, O. BERMEO, V. HUANCA, R. VAQUEZ	FECHA	:	13-12-2023

EXAMEN FINAL

Tiempo de duración: 120 minutos

1. Evalúe los siguientes límites

a) $\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{x^2 + x - 6}{3 - \sqrt{x^2 + 5}} \right) \left(\frac{\sqrt[3]{x-1} - 1}{\sqrt[4]{x-1} - 1} \right)$. (3.0 puntos)

b) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin(x)} \right) \left(\cot(x) - \frac{1}{x} \right)$. (3.0 puntos)

2. Derivar las siguientes funciones:

a) $(f \circ g)$, donde $f(x) = \frac{1}{x^3}$ y $g(x) = \sqrt{x^2 - 2x + 4}$. (2.0 puntos)

b) $(h \circ g)$, donde $h(x) = \arctan(x)$ y $g(x) = x^2 + 2$. (2.0 puntos)

Sugerencia: la derivada de función inversa es dada $(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(y)}$, donde $y = f(x)$.

3. Dada la función f definida por $f(x) = \frac{x^2 + 5}{\sqrt{x^2 + 2}}$,

a) Halle las asíntotas, los puntos críticos. (2.0 puntos)

b) Analice los intervalos de crecimiento, decrecimiento y extremos relativos, si existen.

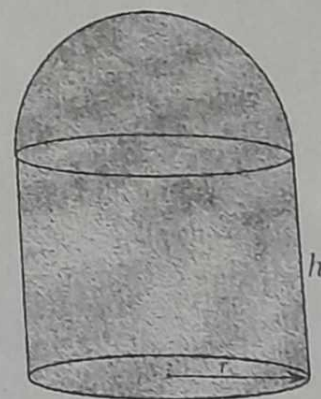
(1.5 puntos)

c) Determine los intervalos de concavidad y puntos de inflexión, si existen. (1.5 puntos)

d) Bosqueje la gráfica.

(1 punto)

4. Un ingeniero desea construir un silo, con un volumen de 100 m^3 , que tenga la forma de un cilindro (radio r , altura h) rematado por una semiesfera. Si el costo de construcción por unidad de superficie es de 16 soles para la semiesfera y 8 soles para la parte cilíndrica. Calcule las dimensiones óptimas que el ingeniero debe elegir para minimizar el costo de construcción. (4.0 puntos)



①

$$a) \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{x^2 + x - 6}{3 - \sqrt{x^2 + 5}} \right) \left(\frac{\sqrt{x+1} - 1}{\sqrt[3]{x+1} - 1} \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \left[\frac{(x+3)(x-2)(3+\sqrt{x^2+5})}{(3-\sqrt{x^2+5})(3+\sqrt{x^2+5})} \right] \left[\frac{(\sqrt{x+1}-1)((x-1)^{2/3} + (x-1)^{1/3} + 1)}{(x-1)^{2/3} + (x-1)^{1/3} + 1} \right] \left[\frac{(x-1)^{3/4} + (x-1)^{2/4} + (x-1)^{1/4} + 1}{(\sqrt[4]{x-1}-1)((x-1)^{3/4} + (x-1)^{2/4} + (x-1)^{1/4} + 1)} \right]$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \left[\frac{-(x+3)(x-2)(3+\sqrt{x^2+5})}{(x+2)(x-2)} \right] \left[\frac{(x-2)}{(x-1)^{2/3} + (x-1)^{1/3} + 1} \right] \left[\frac{(x-1)^{1/4} + (x-1)^{2/4} + (x-1)^{1/4} + 1}{x-2} \right] =$$

$$(6) \left(-\frac{5}{4} \right) \left(\frac{1}{3} \right) \left(\frac{4}{1} \right) = -\frac{10}{3}$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x} \right) \left(\frac{\cos(x) - 1}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \underbrace{\left(\frac{\sin x - x}{x \sin x} \right)}_{\frac{0}{0}} \underbrace{\left(\frac{x \cos x - \sin x}{x \sin x} \right)}_{\frac{0}{0}}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x - x}{x \sin x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{\sin x + x \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin^2(x/2)}{x \left(\frac{\sin x}{x} + \cos x \right)} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x \cos x - \sin x}{x \sin x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - x \sin x - \cos x}{\sin x + x \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x \sin x}{x \left(\frac{\sin x}{x} + \cos x \right)} = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} = 0$$

NO ESCRIBIR

(2)

a) (f ∘ g) f(x) = $\frac{1}{x^3}$ y g(x) = $\sqrt{x^2 - 2x + 4}$

f'(x) = $-\frac{3}{x^4}$, g'(x) = $\frac{x-1}{\sqrt{x^2 - 2x + 4}}$

(f ∘ g)' = f'(g(x)) · g'(x) = $-\frac{3}{(\sqrt{x^2 - 2x + 4})^4} \cdot \frac{x-1}{\sqrt{x^2 - 2x + 4}}$

b) (h ∘ g) h(x) = arctan(x), g(x) = x^2 + 2

h'(x) = $\frac{1}{1+x^2}$, g'(x) = 2x

⇒ (h ∘ g)' = h'(g(x)) · g'(x) = $\left(\frac{1}{1+(x^2+2)^2}\right) (2x)$

(3) f(x) = $\frac{x^2+5}{\sqrt{x^2+2}}$

a) Asintotas A.V: $\emptyset$

A.H: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2+5}{\sqrt{x^2+2}} = \infty$ No tiene

A.O: y = mx + b

m₁ = $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2+5}{x\sqrt{x^2+2}} = 1$, b₁ = $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2+5}{\sqrt{x^2+2}} - x = 0$

m₂ = $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2+5}{x\sqrt{x^2+2}} = -1$, b₂ = $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) - x = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2+5}{\sqrt{x^2+2}} - x = 0$

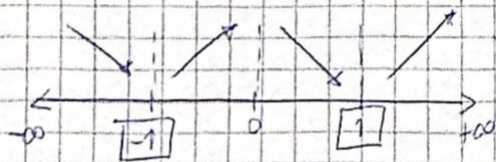
∴ A.O: y = x, y = -x

Puntos críticos

f'(x) = $\frac{2x\sqrt{x^2+2} - (x^2+5) \frac{x}{\sqrt{x^2+2}}}{(\sqrt{x^2+2})^2} = \frac{2x(x^2+2) - x(x^2+5)}{(x^2+2)^{3/2}} = 0 \Rightarrow \begin{matrix} x = -1 \\ x = 0 \\ x = 1 \end{matrix}$

$\frac{x^2-x}{(x^2+2)^{3/2}} = 0$

b) Intervalos de crecimiento, decrecimiento, extremos relativos:



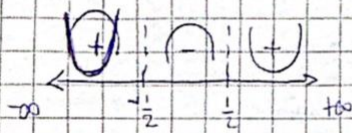
Creciente: $\langle -1, 0 \rangle$; $\langle 1, +\infty \rangle$

Decreciente: $\langle -\infty, -1 \rangle$; $\langle 0, 1 \rangle$

Mínimo relativo: $(-1, 2\sqrt{3})$; $(1, 2\sqrt{3})$

Máximo relativo: $(0, \frac{5}{\sqrt{2}})$

c) Concavidad: $f''(x) = \frac{2(4x^2-1)}{(x^2+2)^{3/2}} = 0 \Rightarrow x = \pm \frac{1}{2}$

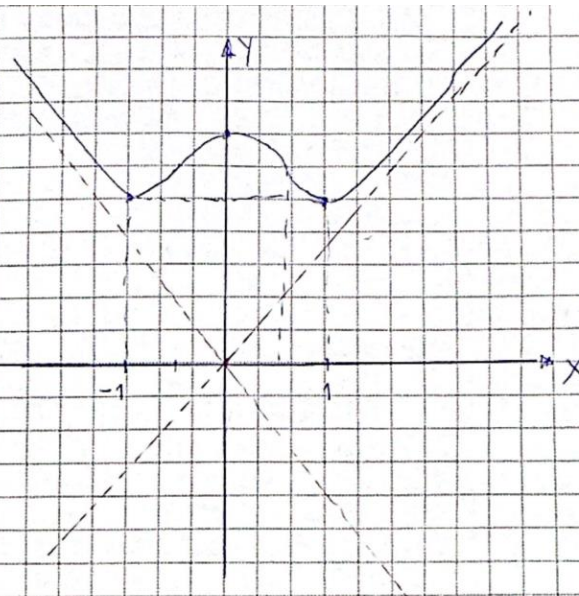


A. ~~$\langle -\infty, -\frac{1}{2} \rangle$~~ , $\langle -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \rangle$

U. $\langle \frac{1}{2}, +\infty \rangle$; $\langle -\infty, -\frac{1}{2} \rangle$

Puntos inflexión: $(-\frac{1}{2}, \frac{7}{2})$; $(\frac{1}{2}, \frac{7}{2})$

d)



4) $V_T = 100$; $V_{SE} = \frac{2}{3} \pi r^3$; $V_C = \pi r^2 h$

$$\Rightarrow \frac{2}{3} \pi r^3 + \pi r^2 h = 100 \Rightarrow h = -\frac{2r}{3} + \frac{100}{\pi r^2}$$

Costo: S/16 semiesfera y S/8 cilindro

$$\Rightarrow C(r) = 8(2\pi r h) + 16(2\pi r^2) \Rightarrow C(r) = 16\pi r \left(-\frac{2r}{3} + \frac{100}{\pi r^2} \right) + 32\pi r^2$$

$$C(r) = \frac{64\pi}{3} r^2 + \frac{1600}{r} ; r > 0$$

$$C'(r) = \frac{128\pi r}{3} - \frac{1600}{r^2} = 0 \Rightarrow r = \sqrt[3]{\frac{75}{2\pi}} \approx 2,3$$

Para verificar si minimiza la función. (Cálculo 2.ª derivada)

$$C''(r) = \frac{128\pi}{3} + \frac{3200}{r^3} > 0 \Rightarrow \text{en } r = 2,3 \text{ ocurre un mínimo.}$$

Luego $h = 4,6m$ y $r = 2,3m$